

زاویه های داخلی

به نام خدا

درس این جلسه درباره زاویه های داخلی و زاویه های خارجی هست.

تعریف زاویه داخلی چیه؟

زاویه هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند، زاویه های داخلی آن چندضلعی نامیده می شوند.

مطالب این قسمت دو تا بخش اصلی داره:

۱. به دست آوردن زاویه های داخلی یه چندضلعی

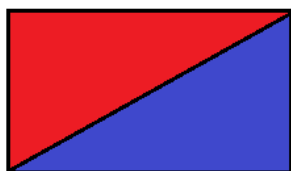
۲. به دست آوردن اندازه هر زاویه یک چندضلعی منتظم

ماسبه زوایای داخلی یک چندضلعی:

با زاویه های داخلی قبلا آشنا شدیم، مثلا می دونیم مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180 درجه س.

حالا اگه بفوایم بدونیم زاویه های داخلی یه چهارضلعی چند درجه س چکار می کنیم؟

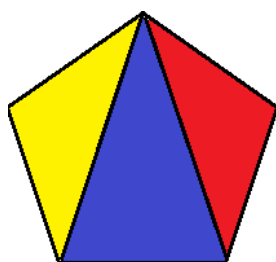
خب می گیم ما می دونیم که مجموع زاویه های داخلی یه مثلث 180 درجه س، پس می ایم این چهارضلعی رو به چند تا مثلث تبدیل می کنیم:



چند تا مثلث شد؟ ۲ تا. پس مجموع زاویه‌های داخلی یه چهارضلعی برابره با:

$$۲ \times ۱۸۰ = ۳۶۰$$

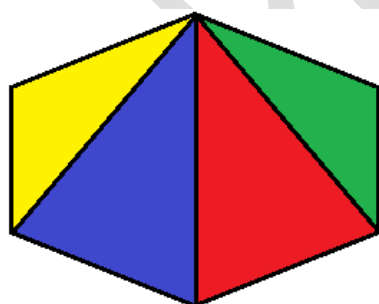
حالا همین کار رو برای یه ۵ ضلعی انجام میدیم:



با ۵ ضلعی چند تا مثلث ساخته شد؟ ۳ تا. بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی پنج ضلعی برابره با:

$$۳ \times ۱۸۰ = ۵۴۰$$

حالا برای ۶ ضلعی:



چند تا مثلث ساخته شد؟ ۴ تا. بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی یک ۶ ضلعی برابره با:

$$۴ \times ۱۸۰ = ۷۲۰$$

ما برای هر چند ضلعی که بخواهیم می‌توانیم این کار رو انجام بدیم ولی دو تا مشکل وجود داره:

هم وقتگیره این کار و هم اینکه اگه تعداد اضلاع زیاد بشه احتمال خطا کردن بالاتر میره پس چکار کنیم؟

سعی می‌کنیم که یه ارتباط بین تعداد اضلاع و تعداد مثلثهایی که ساخته میشه به دست بیاریم.

با ۳ ضلع ۱ مثلث ساخته میشه

با ۴ ضلع ۲ مثلث ساخته میشه

با ۵ ضلع ۳ مثلث ساخته میشه

با ۶ ضلع ۴ مثلث ساخته میشه

همینطور که می‌بینیم تعداد مثلثهایی که ساخته میشه از تعداد اضلاع چند ضلعی، ۲ تا کمتره. پس دیگه نیاز نیست شکل بکشیم تا بفهمیم چند تا مثلث میشه ساخت.

بنابراین:

برای اینکه مجموع زاویه های داخلی یه چند ضلعی رو بدونیم چکار کنیم؟
دو تا کار انجام میدیم:

گام ۱. از تعداد ضلعهای داده شده دو تا کم می‌کنیم.

گام ۲. عدد به دست اومده رو در ۱۸۰ ضرب می‌کنیم.

مثال:

مجموع زوایای داخلی یک ۴ ضلعی

گام ۱. از تعداد ضلعهای داده شده دو تا کم می‌کنیم.

$$4 - 2 = 2$$

گام ۲. عدد به دست آمده رو در ۱۸۰ ضرب می‌کنیم.

$$2 \times 180 = 360$$

پس مجموع زوایای داخلی یک چهارضلعی ، ۳۶۰ درجه هست.

یه مثال دیگه:

مجموع زوایای داخلی یک ۶ ضلعی

گام ۱. از تعداد ضلعهای داده شده دو تا کم می‌کنیم.

$$6 - 2 = 4$$

گام ۲. عدد به دست آمده رو در ۱۸۰ ضرب می‌کنیم.

$$4 \times 180 = 720$$

پس مجموع زوایای داخلی یک ۶ ضلعی ، ۷۲۰ درجه هست.

اگه همین کاری که انجام دادیم رو بخوایم به صورت فرمول بنویسیم، بصورت زیر میشه:

$$180 \times (n - 2) = \text{مجموع زاویه های داخلی یک } n \text{ ضلعی}$$

مطلبی که در ادامه می‌فروایم یاد بگیریم اینه:

آگه یه چندضلعی منتظم باشه، هر زاویه‌ش چند درجه هست؟

تعریف چند ضلعی منتظم رو یاد تونه؟

چند ضلعی که همه‌ی زاویه‌هاش با هم و همه‌ی اضلاعش با هم برابر باشن.

مماسه اندازه هر زاویه، در چندضلعی های منتظم:

تا اینجا یاد گرفتیم اندازه زاویه های داخلی یه چند ضلعی رو پیدا کنیم.

از طرفی می‌دونیم که در یک چندضلعی منتظم، همه زاویه ها با هم برابرن

خب از این دو تا جمله چه نتیجه ای می‌تونیم بگیریم؟

برای اینکه اندازه هر زاویه در یک چندضلعی منتظم رو بدست بیاریم، باید مجموع زاویه های داخلی رو بر تعداد زاویه ها تقسیم کنیم.

پس به طور کلی برای مماسه اندازه هر زاویه در یک چندضلعی منتظم گامهای زیر رو باید انجام بدیم:

گام ۱. مجموع زاویه های داخلی چندضلعی رو به دست میاریم.

گام ۲. عدد به دست اومده رو بر تعداد زاویه ها تقسیم می‌کنیم.

مثلا فرض کنید می‌فروایم اندازه هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم رو به دست بیاریم.

گام ۱. مجموع زاویه های داخلی چندضلعی رو به دست میاریم.

در قسمت قبل به دست آوردیم و برابر ۳۶۰ شد.

گام ۲. عدد به دست آمده رو بر تعداد زاویه ها تقسیم می‌کنیم.

پهنا ضلعی منتظم ۴ تا زاویه داره پس عدد به دست آمده رو بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$۳۶۰ \div ۴ = ۹۰$$

اندازه هر زاویه داخلی یک ۶ ضلعی منتظم رو به دست می‌آید.

گام ۱. مجموع زاویه های داخلی n ضلعی رو به دست می‌آید.

در قسمت قبل به دست آوردیم و برابر ۷۲۰ شد.

گام ۲. عدد به دست آمده رو بر تعداد زاویه ها تقسیم می‌کنیم.

۶ ضلعی منتظم ۶ تا زاویه داره پس عدد به دست آمده رو بر ۶ تقسیم می‌کنیم:

$$۷۲۰ \div ۶ = ۱۲۰$$

و آنگه بفوایم به صورت فرمولی بنویسیم:

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی یک } n \text{ ضلعی منتظم} = \frac{(n-2) \times 180}{n}$$

مطلب مهم بعدی که می‌فویم یاد بگیریم و توی امتحان هم حتما ازش سوال می‌آید درباره کاشیکاری هست.

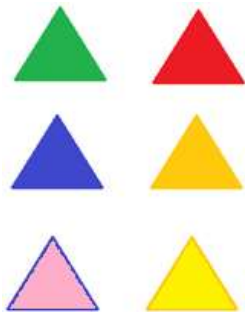
کاشیکاری به دو صورت انجام میشه:

یا با استفاده از چند نوع کاشی

یا با استفاده از یک نوع کاشی

یه سوال:

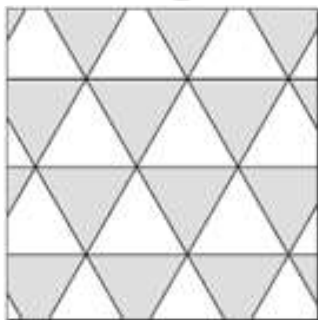
آیا ما می‌تونیم یه سطح رو فقط با کاشیهایی بپوشونیم که مثلث متساوی‌الاضلاع هستن؟
یعنی با سه ضلعیهای منتظم؟



با این مثلثها می‌تونیم یه سطح رو به صورت زیر کاشیکاری کنیم:



پس توی ابعاد بزرگتر به صورت زیر همیشه:

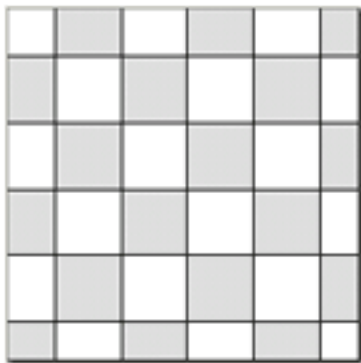


آیا با چهار ضلعی منتظم یا همون مربع می‌تونیم یه سطح رو کاشیکاری کنیم؟

اینو هتما هممون دیدیم و می‌دونیم که میشه، مثل موزاییک‌هایی که کف کلاستون هست ☺



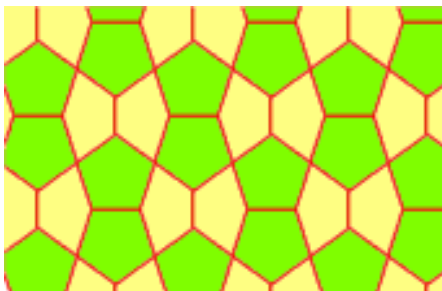
پس توی ابعاد بزرگتر به صورت زیر میشه:



تا اینجا دیدیم که با سه ضلعی منتظم و چهار ضلعی منتظم می‌تونیم سطوح رو کاشیکاری کنیم.

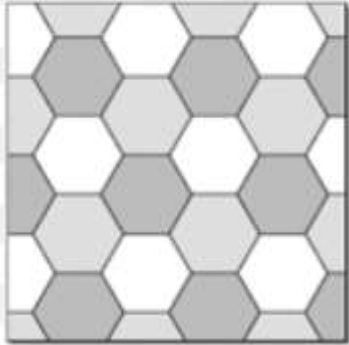
آیا با پنج ضلعی منتظم هم میشه این کار رو انجام داد؟

خیر، ما با پنج ضلعی منتظم به تنهایی نمی‌تونیم سطح رو کاشیکاری کنیم و می‌بوریم از کاشیهای دیگه هم استفاده کنیم، مثل شکل زیر:



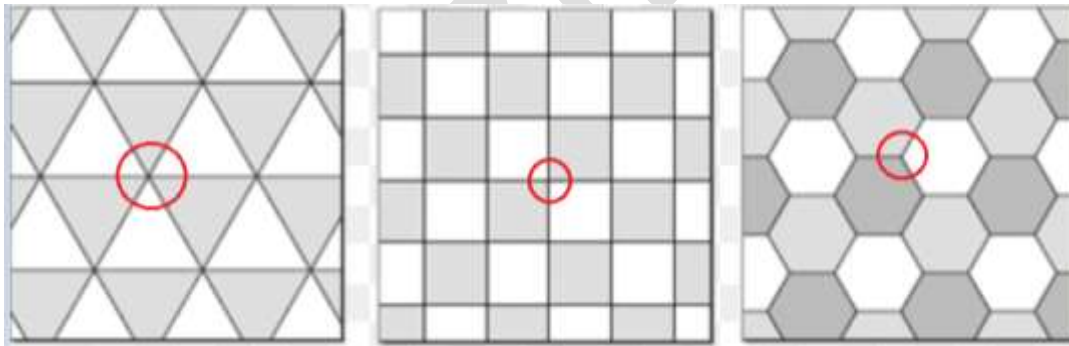
آیا یا شش ضلعی منتظم همیشه به سطح رو کاشی کرد؟

بله . به صورت زیر:



حالا به سوال موعم پیش میار، به چند ضلعی منتظم باید چه خصوصیتی داشته باشه که بتونیم به سطح رو باهاش کاشی کنیم؟

به شکلهای زیر توجه کنید:



ما با چند ضلعی هایی می تونیم کاشیکاری کنیم که:

اندازه زاویه داخلی چند ضلعی طوری باشه که آگه چند تا از زاویه ها رو کنار هم قرار دادیم، مجموعشون بشه 360° درجه

زاویه داخلی سه ضلعی منتظم 60° درجه‌س، پس آگه ۶ تا رو از راس کنار هم قرار بدیم 360° درجه میشه.

زاویه داخلی چهارضلعی منتظم 90° درجه‌س، پس آگه ۴ تا رو از راس کنار هم قرار بدیم 360° درجه میشه.

زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° درجه‌س، پس آگه ۳ تا رو از راس کنار هم قرار بدیم 360° درجه میشه.

مطالبی که گفتیم رو جمع بندی می‌کنیم.

برای اینکه بفهمیم با یک چندضلعی می‌تونیم کاشیکاری انجام بدیم یا نه، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: اندازه زاویه داخلی چندضلعی رو به دست میاریم.

گام دوم: 360° رو بر اندازه زاویه داخلی تقسیم می‌کنیم.

گام سوم: آگه جواب یه عدد طبیعی شد می‌تونیم کاشیکاری رو انجام بدیم.

آگه جواب عدد اعشاری شد، نمی‌تونیم کاشیکاری انجام بدیم.

آگه توی سوال اندازه زاویه داخلی رو داده بودن دیگه نیاز نیست گام ۱ رو انجام بدیم.

مثال:

با کدامیک از کاشیهای زیر میتوان کاشیکاری انجام داد؟



اولین شکل، زاویه داخلی ۱۰۸ درجه‌س :

$$360 \div 108 = 3/3$$

نتیجه تقسیم عدد اعشاری شد بنابراین نمی‌توانیم کاشیکاری انجام بدیم.

دومین شکل، زاویه داخلی ۱۲۰ درجه‌س :

$$360 \div 120 = 3$$

نتیجه تقسیم، عدد طبیعی شد پس می‌توانیم کاشیکاری انجام بدیم.

سومین شکل، زاویه داخلی ۱۲۸/۵ درجه‌س :

$$360 \div 128/5 = 2/8$$

نتیجه تقسیم عدد اعشاری شد بنابراین نمی‌توانیم کاشیکاری انجام بدیم.

چهارمین شکل، زاویه داخلی ۱۳۵ درجه‌س :

$$360 \div 135 = 2/6$$

نتیجه تقسیم عدد اعشاری شد بنابراین نمی‌توانیم کاشیکاری انجام بدیم.

حل تمرین صفحه ۴۵

زاویه داخلی



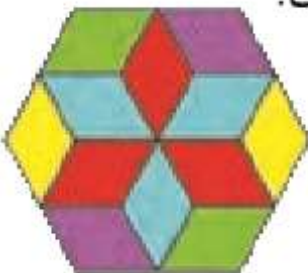
تمرین

۱- اندازه هر یک از زاویه‌های یک بیست ضلعی منتظم را پیدا کنید.

با توجه به توضیحاتی که در جزوه داریم:

$$\text{اندازه هر زاویه} = \frac{(20 - 2) \times 180}{20} = 162$$

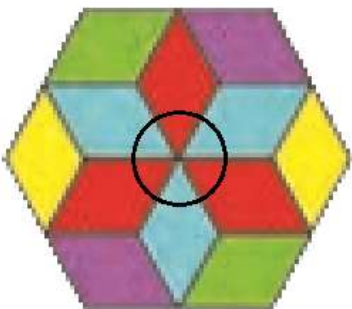
۲- در کاشی کاری روبه‌رو تنها یک نوع کاشی به کار رفته است.



الف) این کاشی چه نوع چهارضلعی‌ای است؟
ب) اندازه هر یک از زاویه‌های آن چقدر است؟

الف: لوزی

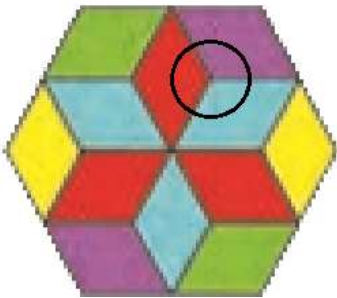
ب: گفتیم توی کاشیکاری مجموع زاویه‌های داخلی که کنار هم قرار گرفتن باید 360° درجه بشه، یعنی مجموع زاویه‌هایی که در شکل زیر با دایره نشون دادیم باید 360° درجه بشه:



فب ۶ تا زاویه داریم که با هم برابرند و مجموعشون ۳۶۰ درجه‌س، بنابراین اندازه هر زاویه برابر میشه با:

$$۳۶۰ \div ۶ = ۶۰$$

اندازه زاویه‌های تند لوزی به دست اومد. برای مناسبه اندازه زاویه‌های بازش، مشابه بالا دور زاویه‌هاش به دایره می‌کشیم:



در اینجا سه تا زاویه برابر داریم که مجموعش ۳۶۰ میشه، بنابراین:

$$۳۶۰ \div ۳ = ۱۲۰$$

پس شکل مورد نظر، لوزی با زاویه‌های ۱۲۰ و ۶۰ درجه‌س.

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

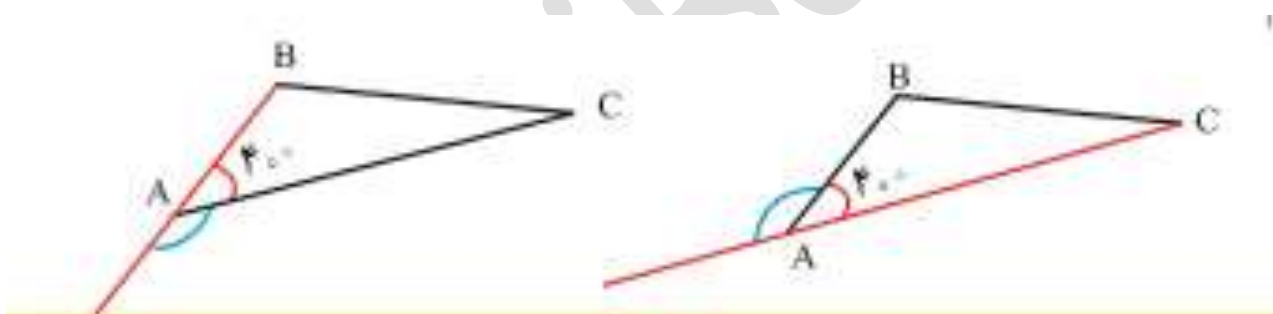
زاویه های خارجی

تعریف زاویه خارجی:

زاویه ای که در رأس هر چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد یک ضلع دیگر تشکیل می شود.

به زبون ساده یعنی اینکه، اگر ما به ضلع رو امتداد بدیم، بین اون ضلع و ضلع دیگه به زاویه بوجود میاد که بوش زاویه خارجی میگیم.

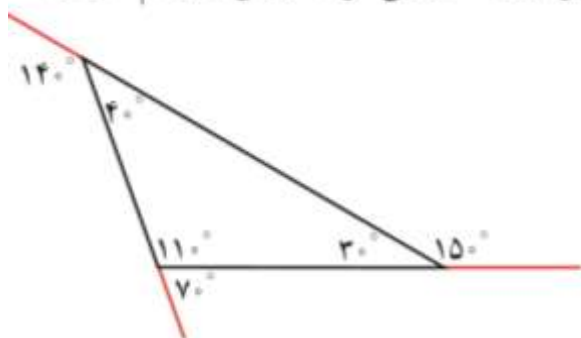
شکلای زیر رو ببینید:

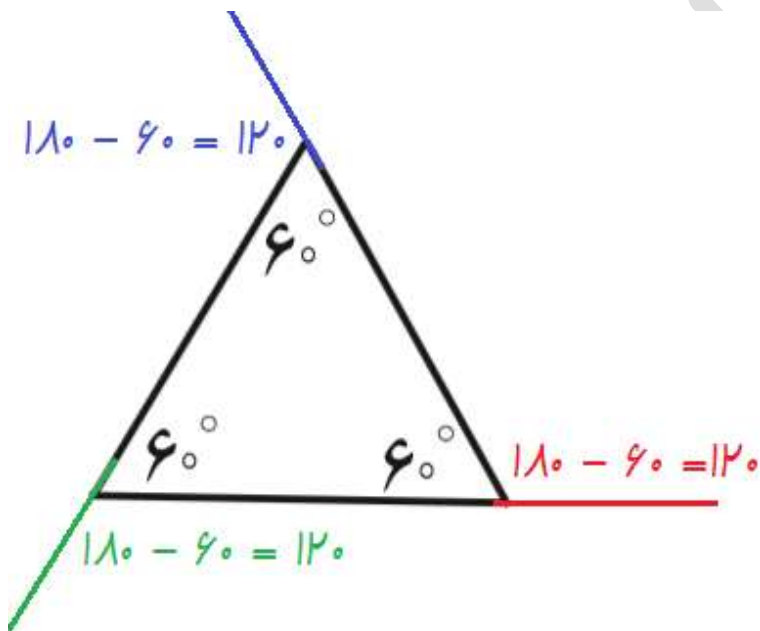
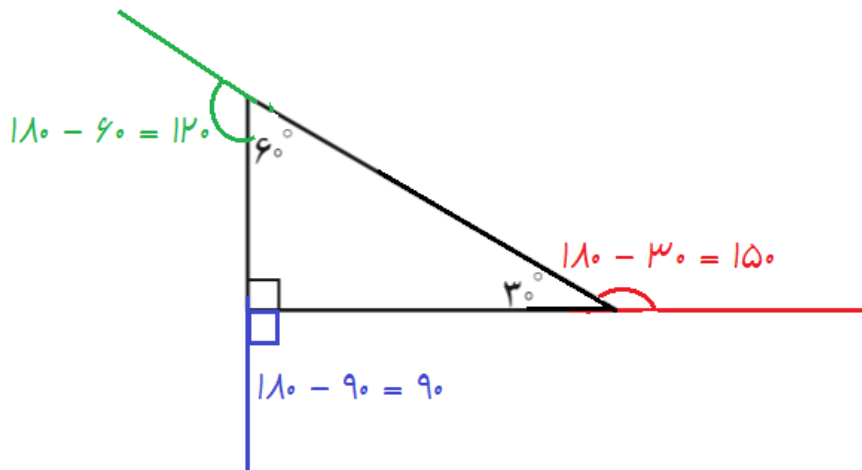


کار در کلاس



۱- الف) مانند نمونه در هر یک از مثلث های زیر، زاویه خارجی هر سه رأس را رسم کنید و اندازه هر کدام را بنویسید.



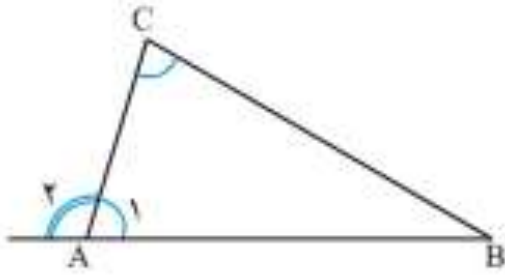


به شکل‌های بالا دقت کنید، هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است. آیا این اتفاقیه یا همیشه اینطوره؟

همیشه اینطوره! پس این مطلب رو می‌نویسیم و ثابت می‌کنیم که همیشه برقراره:

در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است.

حالا ببینیم چرا اینطوره؟ شکل زیر رو ببینید:



می‌دونیم که اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° درجه‌س. بنابراین:

$$A + B + C = 180$$

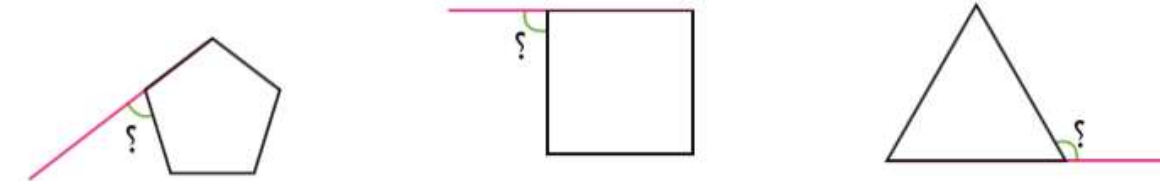
از طرفی زاویه‌های $A1$ و $A2$ با هم مکملن، یعنی:

$$A + A2 = 180$$

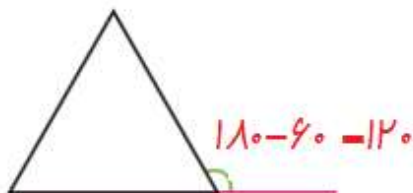
از این دو تا تساوی نتیجه می‌گیریم که:

$$A2 = B + C$$

ب) مجموع زاویه‌های خارجی هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید. چه رابطه‌ای میان آنها دیده می‌شود؟
۲- چندضلعی‌های زیر منتظم‌اند. اندازه زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید.



اندازه هر زاویه داخلی یک سه ضلعی منتظم برابر 60° درجه‌س، بنابراین:



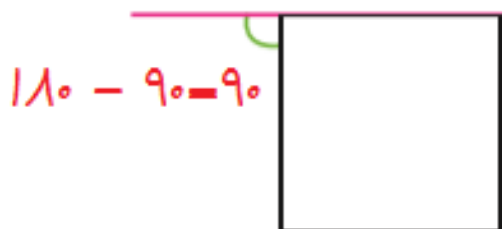
پس اندازه زاویه خارجی یک سه ضلعی منتظم برابر 120° هست.

ما سه تا ضلع داریم بنابراین می‌توانیم سه تا زاویه خارجی هم داشته باشیم، چون شکلمون منتظمه اندازه زاویه‌های خارجی هم با هم برابره، پس مجموع زاویه‌های خارجی برابر میشه با:

$$120 + 120 + 120 = 360$$

حالا بریم سراغ چهارضلعی منتظم:

اندازه زاویه داخلی یه چهارضلعی منتظم برابر ۹۰ درجه‌س، بنابراین:

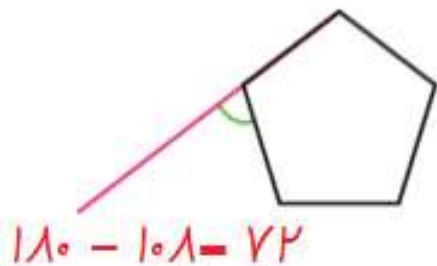


چهارتا ضلع داریم پس ۴ تا زاویه خارجی داریم، بنابراین مجموع زاویه‌های خارجی چهارضلعی منتظم برابره با:

$$90 + 90 + 90 + 90 = 360$$

بریم سراغ پنج ضلعی منتظم:

اندازه هر زاویه داخلی یک پنج ضلعی منتظم برابر ۱۰۸ درجه‌س. بنابراین:



۵ تا ضلع داریم و بنابراین ۵ تا زاویه داخلی. پس مجموع زاویه‌های خارجی پنج ضلعی منتظم برابر با:

$$72 + 72 + 72 + 72 + 72 = 360$$

نکته‌ای که در سه تا شکل بالا وجود دارد این است که مجموع زاویه‌های خارجی در این شکلهای برابر 360° درجه‌س.

این مطلب برای همه چندضلعی‌ها صدق می‌کند. یعنی:

مجموع زاویه‌های خارجی هر چندضلعی برابر 360° درجه‌س.

ما توی شکلهای بالا برای به دست آوردن اندازه زاویه خارجی چند ضلعی‌های منتظم چکار کردیم؟

اول اندازه زاویه داخلی رو به دست آوردیم.

و بعد 180 رو از اون زاویه کم کردیم.

حالا می‌توایم به راه خیلی ساده برای مناسبه اندازه زاویه خارجی یه چندضلعی منتظم پیدا کنیم:

می‌دونیم که :

مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی برابر 360° درجه‌س

زاویه‌های خارجی در چندضلعی‌های منتظم با هم برابرند

هر n -ضلعی منتظم n تا زاویه خارجی دارد

بنابراین برای به دست آوردن اندازه زاویه خارجی به n -ضلعی منتظم کافیست که ۳۶۰ رو بر n تقسیم کنیم.

با این روش به بار دیگر مثالهای بالا رو حل می‌کنیم:

سه ضلعی منتظم:

$$۳۶۰ \div ۳ = ۱۲۰$$

چهار ضلعی منتظم:

$$۳۶۰ \div ۴ = ۹۰$$

پنج ضلعی منتظم:

$$۳۶۰ \div ۵ = ۷۲$$

کار در کلاس



۱- مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی‌های زیر را حساب کنید.

الف) هشت ضلعی

ب) ده ضلعی منتظم

مجموع زاویه‌های خارجی یک چند ضلعی (چه منتظم چه غیرمنتظم) برابر ۳۶۰ درجه است. بنابراین جواب قسمت الف و ب برابر ۳۶۰ درجه همیشه.

۲- به کمک پاسخ قسمت (ب) سؤال قبل،

الف) اندازه هر زاویه خارجی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

ب) اندازه هر زاویه داخلی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

الف: طبق مطالبی که گفتیم، برای به دست آوردن اندازه هر زاویه خارجی یک n ضلعی منتظم کافیست که 360 رو بر n تقسیم کنیم:

$$360 \div n = 36$$

می‌دونیم که به زاویه داخلی و خارجی در یک n -ضلعی منتظم مکمل هستند، پس اگر اندازه زاویه خارجی برابر 36 باشد، اندازه زاویه داخلی برابر همیشه با:

$$180 - 36 = 144$$

در اینجا به روش دیگر هم برای به دست آوردن اندازه زاویه داخلی هر n -ضلعی منتظم به دست آوردیم (در قسمت قبل هم به روش یاد گرفته بودیم 😊)

فلاصه مطالب این بخش:

۱. در مثلث، اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور برابر است.

۲. مجموع زاویه‌های خارجی یک n -ضلعی منتظم برابر 360 درجه است.

۳. برای به دست آوردن اندازه زاویه خارجی یک n -ضلعی منتظم، 360 رو بر n تقسیم می‌کنیم.

۴. برای به دست آوردن اندازه زاویه داخلی یک n -ضلعی منتظم، علاوه بر روشی که در جلسه قبل یاد گرفتیم می‌تونیم از این روش هم استفاده کنیم:

اندازه زاویه خارجی رو به دست میاریم (طبق مطلب شماره ۳) و بعد اون رو از 180 کم می‌کنیم.

$$\text{زاویه خارجی} - 180 = \text{زاویه داخلی}$$

حل تمرین صفحه ۴۹

زاویه خارجی

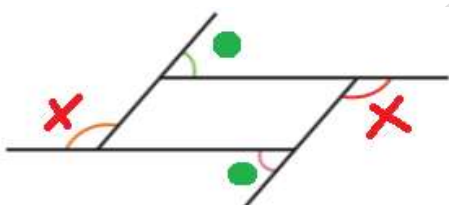


تمرین

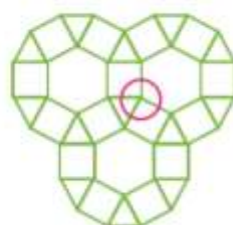
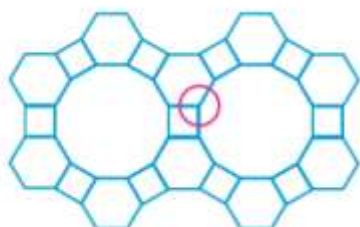


۱- زاویه‌های خارجی یک متوازی الاضلاع در شکل نشان داده شده‌اند. زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

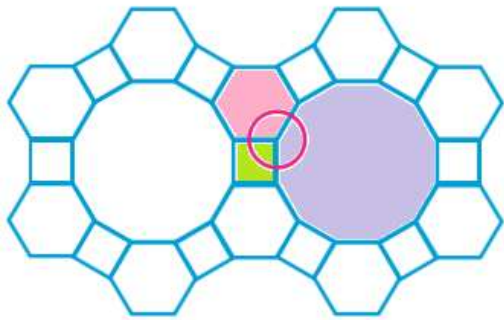
در متوازی الاضلاع زاویه‌های تند با هم برابرند و زاویه‌های باز با هم برابرند. بنابراین زاویه‌های خارجی زاویه‌های تند با هم برابرند و زاویه‌های خارجی زاویه‌های باز با هم برابرند:



۲- هر یک از طرح‌های زیر با استفاده از سه نوع کاشی منتظم طراحی شده است. با محاسبه زاویه‌های داخلی هر کاشی منتظم، نشان دهید زاویه مشخص شده در هر شکل 36° درجه است.



شکل زیر رو ببینید:



شکل سبز رنگ یه مربعه، پس اندازه هر زاویه‌ش ۹۰ درجه‌س.

شکل صورتی یه شش ضلعی منتظمه که اندازه هر زاویه‌ش برابره‌ با:

$$\frac{(6 - 2) \times 180}{6} = 120$$

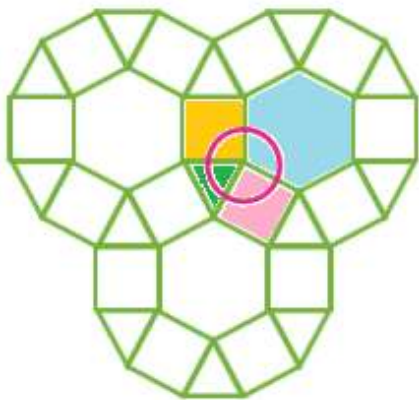
شکل بنفش یه ۱۲ ضلعی منتظمه که اندازه هر زاویه‌ش برابره‌ با:

$$\frac{(12 - 2) \times 180}{12} = 150$$

سه تا زاویه رو با هم جمع می‌کنیم:

$$90 + 120 + 150 = 360$$

قسمت بعد:



در این شکل دو تا مربع داریم، به مثلث متساوی الاضلاع و یک شش ضلعی منتظم

اندازه زاویه داخلی مربع ۹۰ درجه است

اندازه زاویه داخلی مثلث متساوی الاضلاع ۶۰ درجه است

و اندازه زاویه داخلی شش ضلعی منتظم برابر با:

$$\frac{(6 - 2) \times 180}{6} = 120$$

این زاویه‌ها رو با هم جمع می‌کنیم:

$$90 + 90 + 60 + 120 = 360$$

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam8

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.